第 14 章　电磁感应

一　求感应电动势

1. 法拉第电磁感应定律与楞次定律

① 法拉第电磁感应定律

· 基本内容：**回路**所包围面积的磁通量 Φ 发生变化时，回路中会产生感应电动势 ε_i

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

· 正负与方向：通常规定与原磁感应强度方向成右螺旋关系的回路方向为正方向，使得 Φ 一定为正

此时若 ε_i 为正，说明其方向与回路绕行方向相同，否则相反

· **全磁通 Ψ**：若导体由多个线圈串联而成，每个线圈的磁通量为 $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$，则

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}，\ 其中 \Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n$$

② 楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使它所激发出的磁场去阻止引起感应电流的原磁通量的变化

用法拉第电磁感应定律求电动势 —— 磁通量法

① 求出 $\boldsymbol{B}$ 的分布

② 求出回路的磁通量 Φ_m —— 应该是关于 t 的函数

③ 根据定律求出 ε_i 的值

④ 用楞次定律确定电动势的方向

2. 求动生电动势

· **动生电动势**：导体或回路在（稳恒）磁场中运动产生的电动势

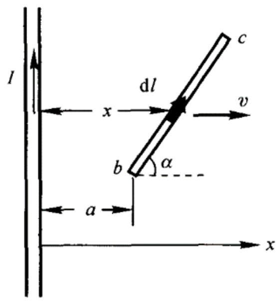
① 用动生电动势定义

· 对于线元 $d\boldsymbol{l}$，其上产生的动生电动势

$$\boxed{d\varepsilon_i = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l}}$$

结果的正/负号表明电动势方向与 $d\boldsymbol{l}$ 相同/相反

例 1　（例题 14.5）如图所示，一长直导线通有电流 I，有一长 l 的金属棒 bc 与 x 方向成 α 角，以速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直于长直导线作匀速运动。当棒的 b 端距导线为 a 时，求金属棒的电动势。



解　① 求 $\boldsymbol{B}$：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$，方向垂直纸面向里

② 表示出 $d\varepsilon_i = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l}$：

$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直，叉乘方向竖直向上，因此与 $d\boldsymbol{l}$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$

$\therefore\ \mathrm{d}\varepsilon_i = vB\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\mathrm{d}l \quad \because\ \mathrm{d}x=\cos\alpha\,\mathrm{d}l \quad \therefore\ \mathrm{d}\varepsilon_i = vB\sin\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}=\frac{v\mu_0 I}{2\pi x}\tan\alpha\,\mathrm{d}x$

③ 积分

$$\varepsilon_i=\int_a^{a+l\cos\alpha}\frac{v\mu_0 I}{2\pi x}\tan\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{v\mu_0 I}{2\pi}\tan\alpha\ln\frac{a+l\cos\alpha}{a}$$

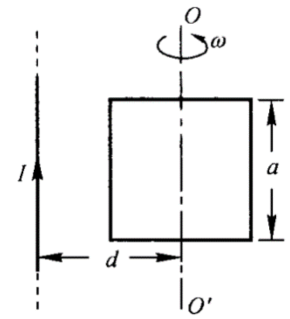
结果 > 0 因此电动势由 b 指向 c

② **磁通量法 —— 补全**

· 将要求电动势的导体与其它**不切割磁感线**的假想导体组成回路，此时回路的电动势就是所求

· 若要求的就是回路电动势，且回路作转动，则一般来说用磁通量法更加便捷

例 2 （习题 14.10）在长直导线附近，有一边长为 a 的正方形线圈，绕其中心线 oo' 以角速度 ω 旋转，转轴 oo' 与长直导线间的距离为 d，如导线中通有电流 I，求线圈中的感应电动势。

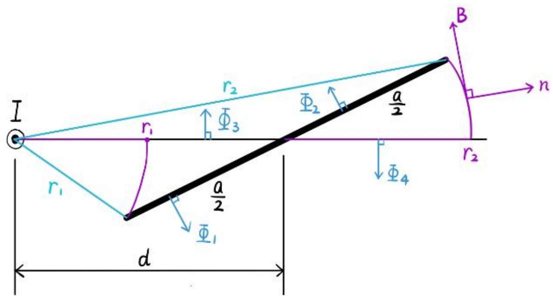


解 设 $t=0$ 时处于线圈平面位于纸面，则 t 时刻线圈转过的角度 $\theta=\omega t$

俯视图如图所示，由于不同位置 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 夹角不同，直接求磁通量很麻烦

此处巧妙地用一个方法来转换：

构建如图所示的 2 个闭合曲面，根据 12 章的结论，闭合曲面磁通量为 0



平行于水平面的两个底面自然没有磁通量，两个扇形圆柱面的 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直，因此 $\Phi_m=0$

只有如图所示的 4 个面有磁通量，记为 Φ_1 至 Φ_4，因此有

$$\Phi_1+\Phi_3=\Phi_2+\Phi_4=0$$

则我们就要求的斜面磁通量 $\Phi_2-\Phi_1$ 转化为新的平面的磁通量 $\Phi_3-\Phi_4$ 了，将 Φ_4 的 $\boldsymbol{n}$ 反向，变成 $\Phi_3+\Phi_4$，实际上是同一平面，且这个面上 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 同向，求解方便很多!

$$\Phi=\int_{r_1}^{r_2}a\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r=a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

这里的 r_2 和 r_1 都是与 t 有关的变量，由几何关系：

$$r_1=\sqrt{(d-\frac{a}{2}\cos\omega t)^2+(\frac{a}{2}\sin\omega t)^2}\ ,\quad r_2=\sqrt{(d+\frac{a}{2}\cos\omega t)^2+(\frac{a}{2}\sin\omega t)^2}$$

代入后，用 $\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 即可得到感应电动势

本题当然可以用动生电动势来求（好像会更简便），求的时候需要搞清楚夹角，因此画图很重要

③ **磁通量法 —— 转化**

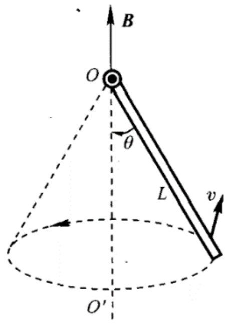
· 将要求电动势的导体与其它假想导体组成回路使得**回路磁通量不变**，此时假想导体电动势为所求

此法可将求复杂形状导体的电动势转化为简单导体（直导线）的电动势

· 均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的常用结论

长 L 的直线导体（与磁场垂直）作平动：$\varepsilon_i = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{L}$　绕一端作转动：$\varepsilon_i = \dfrac{1}{2}\omega L^2$

例 3（习题 14.6）在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中，有一长为 L 的导体棒以匀角速度 ω 绕轴 oo' 轴旋转。oo' 轴与磁场方向平行，棒与磁场方向夹角为 θ，求导线棒中的动生电动势。



解　构建如图所示的回路，该回路平面与 $\boldsymbol{B}$ 平行，因此磁通量恒为 0

从而整个回路的感应电动势为 0

而 OC 段实际上没有运动，因此其上无动生电动势

由以上两个结论可知 OA 的电动势即为 CA 的电动势

由于 CA 在垂直 $\boldsymbol{B}$ 的平面内绕 C 转动，因此感应电动势 $\varepsilon_{\mathrm{OA}} = \varepsilon_{\mathrm{CA}} = \dfrac{1}{2}\omega B(\overline{CA})^2 = \dfrac{1}{2}\omega BL^2\sin^2\theta$

方向由 $O\to A$

3. **求感生电动势**

· **感生电动势**：导体所处磁场发生变化所产生的电动势（通过在周围激发**涡旋电场**）

① **求涡旋电场**（除非题目有要求，一般不推荐该方法）

· 涡旋电场与变化磁场的关系

$$\oint_L \boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\quad\text{（涡旋电场线与}\ \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\ \text{呈左螺旋关系）}$$

· 磁场分布及变化处于高度对称性时，上式的左边可以简化，从而求出 E_i

最常见的是圆柱磁场（题目会直接说明，也会隐含在载流螺线管当中）

$$\begin{cases} 2\pi r\boldsymbol{E}_i = -\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2, & r<R \\ 2\pi r\boldsymbol{E}_i = -\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi R^2, & r>R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{E}_i = -\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r<R \\ \boldsymbol{E}_i = -\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r>R \end{cases}$$

· 感生电动势等于单位正电荷绕闭合回路一周涡旋电场力所做的功

$$\boxed{\varepsilon_i = \oint_L \boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

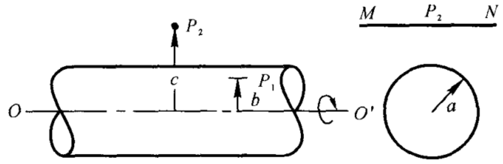
② **磁通量法**

· 将要求电动势的导体与其它**不产生感生电动势**的假想导体组成回路，此时回路的电动势就是所求

· 位于径向的直导线因为处处垂直于涡旋电场，因此不产生感生电动势

例 4（习题 14.17）一半径为 a 的无限长均匀带电圆筒面，单位长度上的电荷为 λ，圆筒绕 oo' 以匀角加速度 β 转动，试求：（1）圆筒内与轴相距为 b 的 P_1 点的电场强度；（2）若有一长为 l 的金属棒

MN 与圆筒轴线相垂直，P_2 点在金属棒正上方且为 MN 中点，垂直距离 $oP_2=c$，求金属棒 MN 两端的电势差。



解 （1）根据 12 章的知识，旋转带电圆筒产生的磁场类似载流螺线圈：

① 单位长度等效电流 $\dfrac{\omega\lambda}{2\pi}$

② 由安培环路定理，$B=\mu_0\dfrac{\omega\lambda}{2\pi}=\mu_0\dfrac{\beta\lambda t}{2\pi}$

③ 涡旋电场 $2\pi rE_i=-\pi r^2\dfrac{\partial B}{\partial t}=-\pi r^2\dfrac{\mu_0\beta\lambda}{2\pi}\quad\rightarrow\quad E_i=-\dfrac{\mu_0\beta\lambda}{4\pi}r$

因此 P_1 点 $E_i=\dfrac{\mu_0\beta\lambda}{4\pi}b$，方向与圆筒旋转方向相反

（2）连接 OM 和 ON，因为这两段为径向，恒与涡旋电场垂直，因此没有感生电动势

则 MN 上电动势就是回路 OMN 的电动势：

$$\Phi=BS=\theta a^2\frac{\mu_0\beta\lambda t}{2\pi}\quad \text{其中}\quad \tan\theta=\frac{l}{2c}$$

$\therefore\ \varepsilon_{\mathrm{MN}}=\dfrac{\mu_0a^2\beta\lambda}{2\pi}\arctan\dfrac{l}{2c}$ （本题题干不清，无法辨别具体方向）

例 5 （习题 14.13）高度为 D 的铜质圆环，内半径为 R_1，外半径为 R_2，放置在垂直于环面的磁场中。若磁场局限在圆环范围内（如图），且磁感应强度按 $B=\dfrac{t}{r}$ 规律变化，式中 t 为时间，r 为环上任一点与圆环中心的距离。已知铜的电阻率为 ρ，求圆环上的电流。

解 取半径为 r，宽 $\mathrm{d}r$ 的圆环，规定顺时针为正方向则该圆环的磁通量

$$\Phi=\int B\cdot\mathrm{d}S=\int_{R_1}^{r}B\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=2\pi\int_{R_1}^{r}t\mathrm{d}r=2\pi t(r-R_1)$$

由此得到圆环上的感应电动势

$$\mathrm{d}\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-2\pi(r-R_1)\quad \text{方向为逆时针}$$

圆环的电阻

$$R=\rho\frac{l}{S}=\rho\frac{2\pi r}{D\mathrm{d}r}$$

因此感应电流

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}\varepsilon_i}{R}=\frac{-2\pi(r-R_1)}{2\pi r\rho}D\mathrm{d}r=-\frac{D}{\rho}(1-\frac{R_1}{r})\mathrm{d}r$$

$$I=\int_{R_1}^{R_2}-\frac{D}{\rho}(1-\frac{R_1}{r})\mathrm{d}r=-\frac{D}{\rho}\left[(R_2-R_1)-R_1\ln\frac{R_2}{R_1}\right]\quad \text{负号说明方向为逆时针}$$

圆盘的感应电流

· 将圆盘分割为微元圆环，半径 r，宽 $\mathrm{d}r$

求出该圆环的磁通量 → 感应电动势 → 电阻 → 感应电流

将所有感应电流叠加（积分）

例 6 （18–19 大题 6）如图所示，两根平行放置相距 $2a$ 的无限长载流直导线，其中一根通稳恒电流 I_0，另一根通交变电流 $i=I_0\cos\omega t$.两导线间有一与其共面的矩形线圈，线圈的边长分别为 l 和 $2b(b>a)$，l 边与长直导线平行，且线圈以速度 v 垂直于导线向右运动。当线圈运动到两导线的中心位置（即线圈中心线与距两导线均为 a 的中心线重合）时，右侧导线中的电流恰好为零，求此时线圈中的（1）动生电动势；（2）感生电动势；（3）感应电动势

解 （1）将磁场分布固定为所求时刻的分布，则此时右侧导线电流为 0，不产生磁场

线圈中，只有与导线平行的部分 AB 和 CD 才产生电动势，因此

$$\varepsilon_{动}=\varepsilon_{动AB}-\varepsilon_{动DC}=B_1vl-B_2vl=\frac{vl\mu_0I_0}{2\pi(a-b)}-\frac{\mu_0I_0vl}{2\pi(a+b)}=\frac{\mu_0I_0vl}{2\pi}[\frac{1}{(a-b)}-\frac{1}{(a+b)}]$$ 方向顺时针

（2）将线圈位置固定为所求时刻的位置，由于左侧导线产生的是稳恒磁场，无感生电动势

因此只考虑右侧导线，则

$$\Phi=-\int_{a-b}^{a+b}\frac{\mu_0 i}{2\pi(2a-r)}l\mathrm{d}r=-\frac{\mu_0 li}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

$$\varepsilon_{感}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由于 $i=I_0\cos\omega t$，因此 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\omega I_0\sin\omega t$，又由于此时 $\cos\omega t=0$，因此 $\sin\omega t=\pm1$

$$\therefore\quad \varepsilon_{感}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}\frac{\mu_0 l\omega I_0}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}, & \omega t=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{顺时针}\\ -\frac{\mu_0 l\omega I_0}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}, & \omega t=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{逆时针}\end{cases}$$

（3）$$\varepsilon=\varepsilon_{动}+\varepsilon_{感}=\begin{cases}\frac{\mu_0I_0vl}{2\pi}\left[\frac{1}{(a-b)}-\frac{1}{(a+b)}\right]+\frac{\mu_0 l\omega I_0}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}, & \omega t=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{\mu_0I_0vl}{2\pi}\left[\frac{1}{(a-b)}-\frac{1}{(a+b)}\right]-\frac{\mu_0 l\omega I_0}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}, & \omega t=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

顺时针为正，逆时针为负

感生电动势与动生电动势同时存在 → 求 t 时刻的感应电动势（考试大题必考）

· ① 假定磁场分布恒为 t 时刻的磁场，求出动生电动势

② 假定导体位置固定于 t 时刻的位置，求出感生电动势

③ 两者相加，得到感应电动势

二　求自感和互感系数与电动势

1. 自感

① 基本概念

- **自感现象**：由于回路中电流变化而在回路自身中产生感应电动势（**自感电动势**）
- 此时通过回路的全磁通 Ψ 与电流 I 成正比，L 称为**自感系数**

$$\boxed{\Psi = LI}$$

- 自感电动势 $\boxed{\varepsilon_i = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$，负号表示 ε_i 与 I 方向相反

② 求回路的自感系数与自感电动势

- 假设回路中通有电流 I，算出磁场分布，然后算出全磁通 Ψ，用 $\boxed{\Psi = LI}$ 求出自感系数
- 若通有随时间变化的电流 i，按照 $\varepsilon_i = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 计算自感电动势

例 7　两根半径为 a 的平行长直传输线，相距为 d，且 $a << d$，求单位长度传输线的自感。

解　假设传输线中通电流 I，则离 AB 为 r 处的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

由于 $a << d$，因此可忽略导线内部的磁通量：

$$\Phi = \int_a^{d-a} l\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right]\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}\quad \text{单位长度的磁通量}\ \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

因此自感系数 $L = \dfrac{\mu_0 I}{\pi}\ln\dfrac{d-a}{a}$

2. 互感

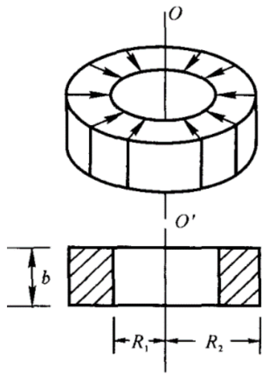
① 基本概念

- **互感现象**：一个回路中的电流变化而在另一个回路中产生感应电动势（**互感电动势**）
- **互感系数** $M_{12} = M_{21} = M$，使得 $\Psi_{21} = MI_1$，$\Psi_{12} = MI_2$
- 互感电动势 $\boxed{\varepsilon_{21} = -M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}$

② 求回路的互感系数与互感电动势

- 假设回路 1 通有电流 I_1，算出磁场分布，然后算出回路 2 全磁通 Ψ_{21}，用 $\boxed{\Psi_{21} = MI_1}$ 求出系数
- 若通有随时间变化的电流 i_1，按照 $\varepsilon_{21} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ 计算自感电动势

例 8 （习题 14.26）一矩形截面螺绕环（$\mu_r=1$），由细导线均匀密绕而成，内半径为 R_1，外半径为 R_2，高为 b，共 N 匝。在螺绕环的轴线上，另有一无限长直导线 oo'，如图所示，在螺线环内通交变电流 $I=I_0\cos\omega t$，求无限长直导线中的感应电动势



解 本题涉及了两个回路，因此是互感问题。由互感电动势的求法，任务在于求出互感系数 M，既可以假设 I_1 求 Ψ_2，也可假设 I_2 求 Ψ_1，由于载流长直导线不好求磁通量，所以我们假设直导线通 I，求螺绕环的磁通量

① 载流直导线的 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，由于螺绕环内 $\mu_r=1$，因此按真空做

螺绕环的全磁通 $\Psi=N\Phi=N\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}b\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 NIb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

② 互感系数 $M=\Psi/I=\dfrac{\mu_0 Nb}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

③ 互感电动势 $\varepsilon_{21}=-M\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mu_0 Nb\omega I_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}\sin\omega t$

三 求磁场能量

1. 自感磁能

· 自感系数 L 的线圈建立稳定电流 I_0 时，线圈中的磁能为 $W_\mathrm{m}=\dfrac{1}{2}LI_0^2$

2. 磁能密度

· 磁场中某点处的磁能密度 $\boxed{w_\mathrm{m}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}$，积分得到 V 内的磁场能量

磁场能量求解

① 求出 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的分布

② 表示出磁能密度 w_m

③ 在指定的体积范围内对 w_m 进行积分，得到磁场能量 W_m

例 9 （习题 14.26）同轴电缆由半径为 R_1 的铜芯线和半径 R_2 的同轴圆筒所组成（如图），其间充满磁导率为 μ 的绝缘介质。电流 I 从芯线的一端流出经外层圆筒返回，且电流在芯线内均匀分布。求“无限长”同轴电缆上长为 l 的一段的磁场能量

解 根据安培环路定理：$H=\dfrac{I}{2\pi r}$ 则 $B=\dfrac{\mu I}{2\pi r}$，因此磁能密度为 $w_\mathrm{m}=\dfrac{1}{2}BH=\dfrac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$

在该段的磁场能量 $W_\mathrm{m}=\displaystyle\int w_\mathrm{m}\mathrm{d}V=2\pi l\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$